

Bem: N_f ist also in der Nähe
 eines Punktes (x_0, y_0) mit $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$
 mehr oder weniger eine Graphenkurve.

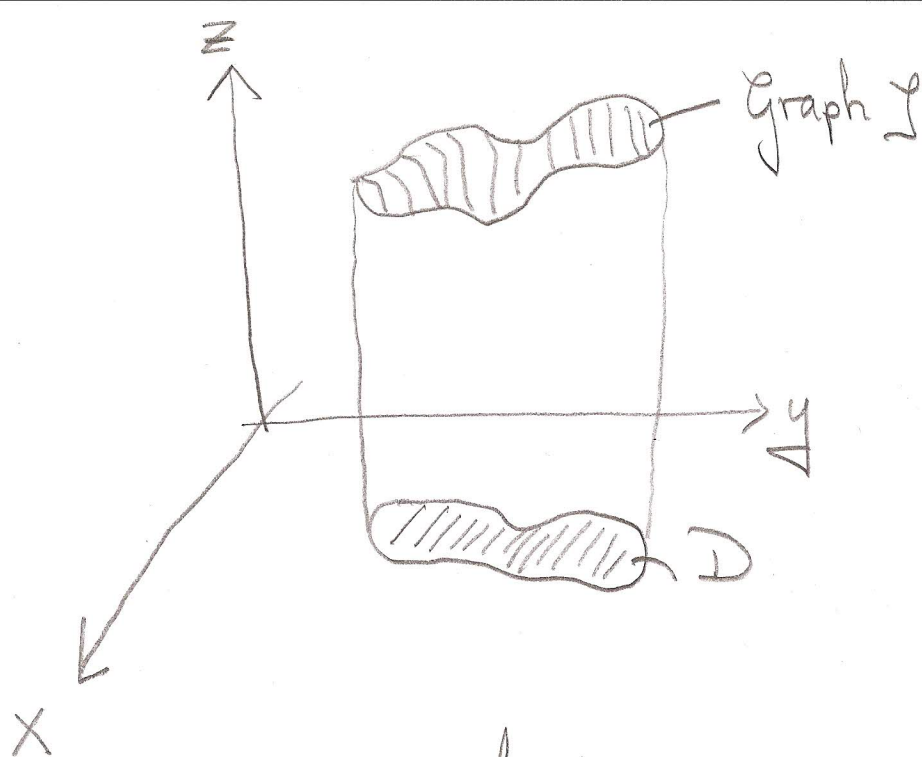
⑦ ebenfalls speziell: $n=3, m=1$
 (Flächen in $\mathbb{R}^3$)

jetzt $f: \mathbb{R}^3 \supset U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$ mit

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Annahme: $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \xRightarrow{\text{Satz 21.2}}$

$$\left| \begin{aligned} N_f \cap \text{Umg. von } (x_0, y_0, z_0) &= \\ \{ (x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D \}, \\ D \subset \mathbb{R}^2 \text{ Umg. von } (x_0, y_0) \end{aligned} \right.$$



analog:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

⑧ wichtig für Anwendungen: $n=3, m=2$

// Schnitt 2^{er} Flächen $\hat{=}$ Raumkurve //

Sei $F = (f, g): \mathbb{R}^3 \supset U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^2$ mit

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Vorstellung: $f(x, y, z) = 0$ Fläche 1
 $g(x, y, z) = 0$ -11- 2

Annahme : $\det \begin{pmatrix} \partial_y f & \partial_z f \\ \partial_y g & \partial_z g \end{pmatrix} (x_0, y_0, z_0) \neq 0$

$\Rightarrow \exists C^1$ -Funktion $I \rightarrow \mathbb{R}^3$,
 $t \mapsto (\varphi(t), \gamma(t))$, $I = \text{Intervall}$
 um x_0 , mit

$N_F \cap \text{Umg. von } (x_0, y_0, z_0) = \{(t, \varphi(t), \gamma(t)) : t \in I\}$

$\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Gamma'(t) := (1, \varphi(t), \gamma(t))$, ist eine
reguläre Raumkurve mit
 $\Gamma'(t) = (1, \varphi'(t), \gamma'(t))$.

entsprechend : die anderen Fälle für „det“

Achtung : alle det's können 0 sein $\Rightarrow$
 keine Aussage möglich ! ▽

Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$
(Anwendungen der Sätze 21.1+2)

• Kurven in $\mathbb{R}^3$: 1-dim Untermfkten

• (gebogene) Flächen
in $\mathbb{R}^3$: 2-dim. -11-

• lineare Situation:

Sei $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ linear mit

$$\text{Rang } \Phi := \dim(\text{Bild } \Phi) = n-k$$

(maximaler Rang).

Wie sieht

$$N_{\Phi} := \text{Kern } \Phi$$

aus?

$N_{\overline{\Phi}}$ ist Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit

$$\dim N_{\overline{\Phi}} = \dim \mathbb{R}^n - \dim (\text{Bild } \overline{\Phi}) = k$$

M.a.W. : $N_{\overline{\Phi}} = \underline{k\text{-dim. Objekt in } \mathbb{R}^n}$

Ersetze nun das lineare $\overline{\Phi}$ sinngemäß
durch diff'bares $\overline{\Phi}$.

Def. 21.2 : Seien $1 \leq k < n$ und M

$\subset \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$. M heißt

k -dim. Untermfkt. von $\mathbb{R}^n$
der Klasse C^l , $l \geq 1$,

falls gilt : Zu jedem $x_0 \in M$ gibt es

eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und

eine Abbildung

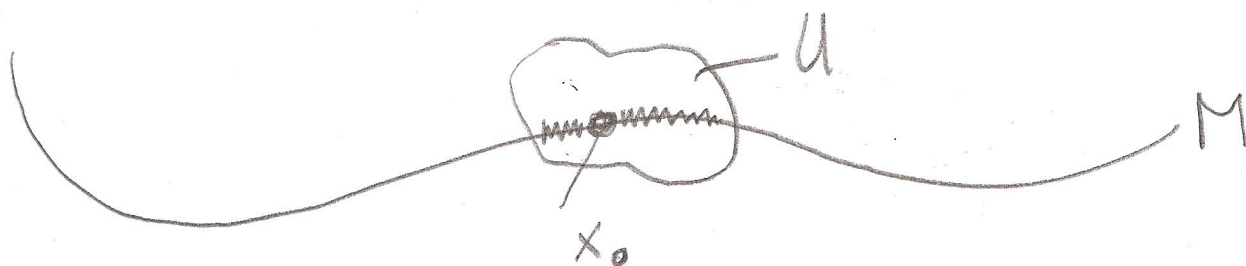
$$\Phi \in C^l(U, \mathbb{R}^{n-k})$$

mit

$$\left| \begin{array}{l} \text{Rang } D\Phi(x) := \dim(\text{Bild } D\Phi(x)) = \\ n-k \quad \forall x \in U \end{array} \right.$$

und

$$M \cap U = \{x \in U : \Phi(x) = 0\}.$$



Spezialfall : $k = n-1$, also

$$\Phi \in C^l(U, \mathbb{R}).$$

Die Rangbedingung lautet

$$\boxed{\nabla \Phi \neq 0}$$

$n-1$ dim Mannigfaltigkeiten
heißen auch Hyperflächen.

Bspl: $M := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}, n \geq 2$

Sei $\Phi(x) := |x|^2 - 1$, also

$$M = N_{\Phi}$$

Es gilt $\nabla \Phi(x) = 2x$, also

Rangbedingung erfüllt für $x \neq 0$, aber
 $x = 0$ gehört nicht zu M . M.a.W.:

$$\text{Rang } D\Phi(x) = 1 \quad \forall x \in M$$

$\Rightarrow$ M Hyperfläche in $\mathbb{R}^n$, nämlich die
Oberfläche der Kugel.

Bem zu Def 21.2:

1.) es wird nicht verlangt, dass man global mit einer Abbildung Φ auskommt!

U, Φ hängen ^{i.a.} von x_0 ab

2.) Def. 21.2 heißt implizite Def.
einer Mfkt. :

Seien x_0, U, Φ wie in der Def;
vertausche die Variablen in $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{a.E.}}$

$$\det \begin{pmatrix} \partial_{k+1} \Phi^1 & \dots & \partial_n \Phi^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{k+1} \Phi^{n-k} & \dots & \partial_n \Phi^{n-k} \end{pmatrix} (x_0) \neq 0$$

also: $\underbrace{\partial \Phi(x_0), \dots, \partial \Phi(x_0)}_{k+1}$ l.u. $^{94-}$
 $n-k$ Vektoren $\in \mathbb{R}^{n-k}$

$\Rightarrow$
Satz 21.2
 (mit $m = n-k$)

$\exists$ Umg. U von x_0 in $\mathbb{R}^n$,
 $^* \subset U$

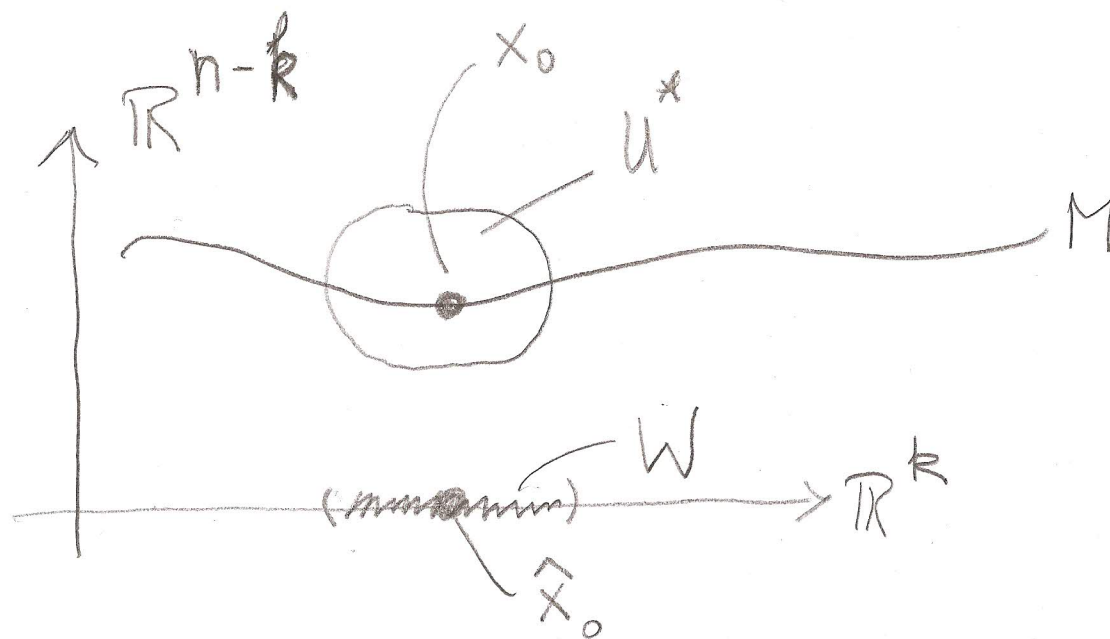
$\exists$ Umg. W von

$$\hat{x}_0 := (x_0^1, \dots, x_0^k)$$

in $\mathbb{R}^k$ sowie

$$\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \text{ mit}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M \cap U^* = \{ (\hat{x}, \varphi(\hat{x})) : \hat{x} \in W \}, \\ \text{Projektion auf } \mathbb{R}^k \text{ von } M \cap U^* = W \end{array} \right.$$



M.a.W. :

M k -dim. Mfkt. in $\mathbb{R}^n \iff$

M ist lokal bis auf Vertauschung der Koordinaten Graph einer Fkt

$$\mathbb{R}^k \xrightarrow{C^l} \mathbb{R}^{n-k}$$

Wir geben noch eine alternative Beschreibung k -dim. Mfkten. Dazu

muss man den Begriff "reguläre Abbildung" (s. Def 21.1) etwas erweitern.

Def 21.1 ^{*} : Sei $k \leq n$ sowie W offen in $\mathbb{R}^k$. Eine Abbildung $F: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^l$

heißt regulär, falls gilt:

i) F injektiv

ii) $\text{Rang } DF \equiv k$

iii) $F^{-1}: F(W) \rightarrow W$ stetig

Bem : Für $k = n$ folgt iii) aus

i) + ii) gemäß Umkehrsatz.

Satz 21.3 : Beschreibung v. Mannigfaltig-
Räumen der Dim. k in $\mathbb{R}^n$

Seien $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq k < n$
und $\ell \geq 1$. Dann sind äquivalent :

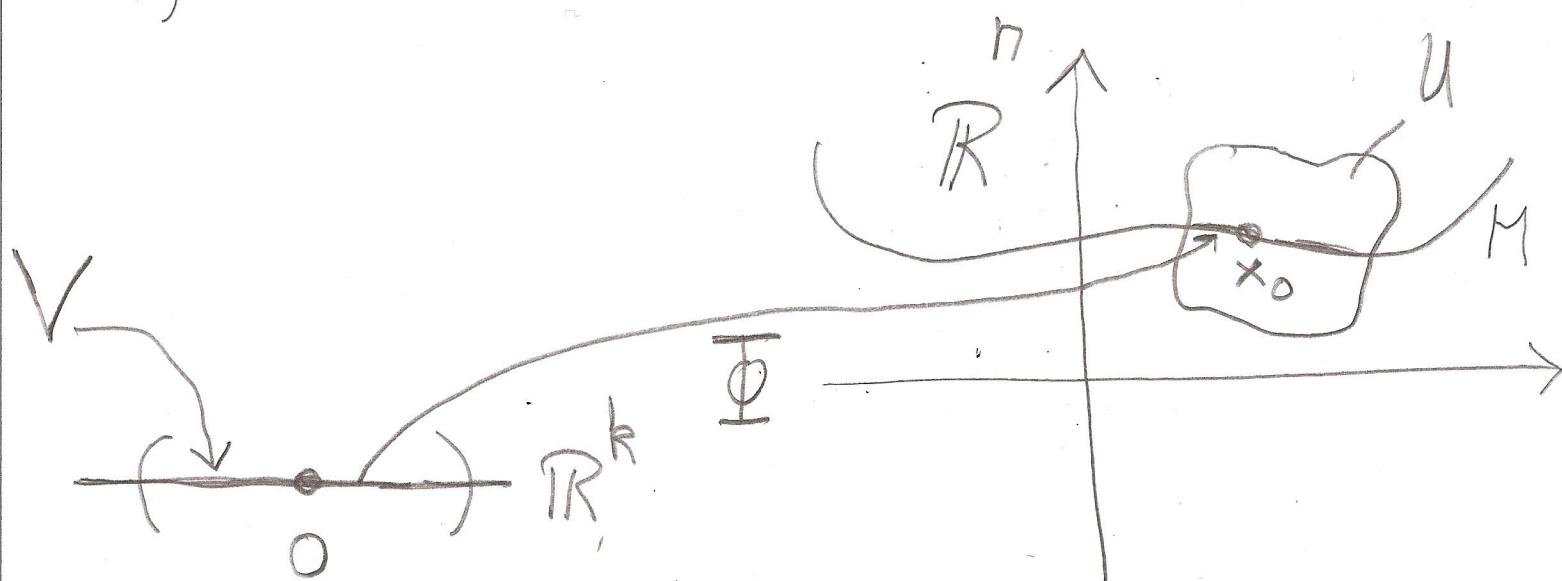
(i) M ist k -dim. Mfkt.
der Klasse C^ℓ

(ii) ($\exists$ regulärer Parametrisierungen)

Zu jedem $x_0 \in M$ gibt es eine Umg.
 $U \subset \mathbb{R}^n$, eine Umgebung V von 0
in $\mathbb{R}^k$ sowie eine reguläre Abb.
 $\Phi: V \xrightarrow{C^\ell} U$ mit $M \cap U = \Phi(V)$,
 $\Phi(0) = x_0$

Bem: 1.) Äquivalenz $(i) \iff (ii)$
wurde vor Def. 21.1* festgestellt.

2.) Bild zu (ii):



Φ heißt lokale Karte oder lokale

Parametrisierung von M bei x_0 .

3.) a) Sei $\Phi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulär

$\implies$ Bild $\Phi =$ "Kurve" =
1-dim. Mfkt.

b) Sei $\Phi: \mathbb{R}^2 \supset \Omega \text{ (offen)} \rightarrow \mathbb{R}^3$ - 99 -

regulär $\implies$ Bild $\Phi =$ "Fläche" $\stackrel{=}{=} 2\text{-dim. Mgmt.} \subset \mathbb{R}^3$

(iii) Beschreibung durch Diffeomorphismen

Zu jedem $x_0 \in M$ gibt es eine offene Umgebung U von x_0 in $\mathbb{R}^n$, eine offene Umgebung W von $\underline{0}$ in $\mathbb{R}^k$ und einen Diffeomorphismus $\varphi: W \xrightarrow{\text{cl}} U$ mit

$$\varphi(W \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})) = M \cap U.$$

Beweis von (i) $\iff$ (iii): —